Successioni di funzioni: esercizi svolti

Gli esercizi contrassegnati con il simbolo * presentano un grado di difficoltà maggiore.

Esercizio 1. Determinare il limite puntuale delle seguenti successioni di funzioni e stabilire se la convergenza è uniforme.

a) $f_n(x) = nx\, e^{-nx}, \quad x \in [0,1]$ [converge ma non uniformemente a $f(x) = 0$]

b) $f_n(x) = n^{-2}\sqrt{1 - x^{2n}}, \quad x \in [-1,1]$ [converge uniformemente a $f(x) = 0$]

c) $f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \le x \le -\frac{1}{n}, \\ nx & \text{se } -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{se } \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$ [converge ma non uniformemente a $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \le x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ 1 & \text{se } 0 < x \le 1 \end{cases}$]

d) $f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{se } 0 < x < \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$ [converge ma non uniformemente a $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$]

e) $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{se } \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$ [converge ma non uniformemente a $f(x) = 0$]

f) $f_n(x) = (1-x)x^n, \quad x \in [0,1]$ [converge uniformemente a $f(x) = 0$]

g) $f_n(x) = x^n, \quad x \in [0,1]$ [converge ma non uniformemente a $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$]

h) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}, \quad x \in [-1,1]$ [converge ma non uniformemente a $f(x) = 0$]

k) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } 0 < x < \dfrac{1}{n}, \\ 0 & \text{se } \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$ [converge uniformemente a $f(x) = 0$]

Svolgimento

a) Determiniamo inizialmente il limite puntuale della successione (f_n), dove $f_n(x) = nx\, e^{-nx}$ per ogni $x \in [0,1]$. Si ha che per ogni $x \in [0,1]$

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n nx\, e^{-nx} = 0.$$

Quindi la successione (f_n) tende puntualmente su $[0,1]$ alla funzione $f(x) = 0$.

Studiamo ora la convergenza uniforme della successione (f_n) a f su $[0,1]$. Calcoliamo il limite

$$\lim_n \|f_n - f\|_\infty = \lim_n \left(\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \right) = \lim_n \left[\sup_{x \in [0,1]} \left(nx\, e^{-nx} \right) \right].$$

Calcoliamo il $\sup_{x \in [0,1]} \left(nx\, e^{-nx} \right)$. Poichè per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione $f_n(x) = nx\, e^{-nx}$ è continua su $[0,1]$, per il Teorema di Weierstrass ammette massimo. Ne segue che

$$\sup_{x \in [0,1]} \left(nx\, e^{-nx} \right) = \max_{x \in [0,1]} \left(nx\, e^{-nx} \right).$$

Osserviamo che f_n è anche derivabile su $[0,1]$ con $f_n'(x) = n(1 - nx)\, e^{-nx}$. Quindi per ogni $n \geq 1$ si ha che $f_n'(x) = 0$ per $x = \frac{1}{n} \in [0,1]$ e $f_n'(x) > 0$ per $0 \leq x < \frac{1}{n}$. Ne segue che $x = \frac{1}{n}$ è il punto di massimo di f_n su $[0,1]$ e

$$\max_{x \in [0,1]} \left(nx\, e^{-nx} \right) = f\left(\frac{1}{n} \right) = e^{-1}.$$

Pertanto si ha che

$$\lim_n \|f_n - f\|_\infty = \lim_n \left[\sup_{x \in [0,1]} \left(nx\, e^{-nx} \right) \right] = e^{-1} \neq 0.$$

Ne segue che la successione (f_n) non converge uniformemente a f su $[0,1]$.

b) Determiniamo inizialmente il limite puntuale della successione (f_n), dove $f_n(x) = n^{-2}\sqrt{1 - x^{2n}}$ per ogni $x \in [-1,1]$. Si ha che per ogni $x \in [-1,1]$

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n n^{-2}\sqrt{1 - x^{2n}} = 0.$$

Quindi la successione (f_n) tende puntualmente su $[-1,1]$ alla funzione $f(x) = 0$.

Studiamo ora la convergenza uniforme della successione (f_n) a f su $[-1,1]$. Calcoliamo il limite

$$\lim_n \|f_n - f\|_\infty = \lim_n \left(\sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| \right) = \lim_n \left[\sup_{x\in[-1,1]} \left(n^{-2}\sqrt{1-x^{2n}} \right) \right].$$

Calcoliamo il $\sup_{x\in[-1,1]} \left(n^{-2}\sqrt{1-x^{2n}} \right)$. Poichè per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione $f_n(x) = n^{-2}\sqrt{1-x^{2n}}$ è continua su $[-1,1]$, per il Teorema di Weierstrass ammette massimo. Ne segue che

$$\sup_{x\in[-1,1]} \left(n^{-2}\sqrt{1-x^{2n}} \right) = \max_{x\in[-1,1]} \left(n^{-2}\sqrt{1-x^{2n}} \right).$$

Osserviamo che f_n è anche derivabile su $(-1,1)$ con

$$f_n'(x) = -\frac{x^{2n-1}}{n\sqrt{1-x^{2n}}}.$$

Quindi per ogni $n \geq 1$ si ha che $f_n'(x) = 0$ per $x = 0 \in [-1,1]$ e $f_n'(x) > 0$ per $-1 < x < 0$. Ne segue che $x = 0$ è il punto di massimo di f_n su $[-1,1]$ e

$$\max_{x\in[-1,1]} \left(n^{-2}\sqrt{1-x^{2n}} \right) = f(0) = \frac{1}{n^2}.$$

Pertanto si ha che

$$\lim_n \|f_n - f\|_\infty = \lim_n \left[\sup_{x\in[-1,1]} \left(n^{-2}\sqrt{1-x^{2n}} \right) \right] = \lim_n \frac{1}{n^2} = 0.$$

Ne segue che la successione (f_n) converge uniformemente a f su $[-1,1]$.

c) Determiniamo inizialmente il limite puntuale della successione (f_n), dove

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x \leq -\frac{1}{n}, \\ nx & \text{se } -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{se } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

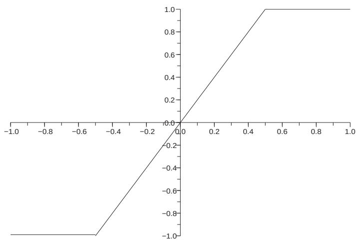


Fig. a: Grafico di f_n per $n = 2$.

Essendo f_n dispari per ogni $n \geq 1$, è sufficiente considerare $x \in [0, 1]$.

Per $x = 0$ si ha che $f_n(0) = 0$ per ogni n. Ne segue che

$$\lim_n f_n(0) = 0.$$

Quindi la successione (f_n) converge puntualmente a 0 in $x = 0$.

Sia ora $x \in]0, 1]$. Poichè $\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$, si ha che definitivamente $\frac{1}{n} \leq x$, cioè esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq N$ si ha $\frac{1}{n} \leq x$. Ne segue che per ogni $n \geq N$ si ha $f_n(x) = 1$. Quindi se $x \in]0, 1]$ si ha che

$$\lim_n f_n(x) = 1.$$

Per simmetria si ha che se $x \in [-1, 0[$

$$\lim_n f_n(x) = -1.$$

Quindi la successione (f_n) tende puntualmente su $[-1, 1]$ alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ 1 & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Poichè le funzioni f_n sono continue mentre f non è continua su $[-1, 1]$, si ha che la successione (f_n) non converge uniformemente a f su $[-1, 1]$.

d) Determiniamo inizialmente il limite puntuale della successione (f_n), dove

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{se } 0 < x < \dfrac{1}{n}, \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

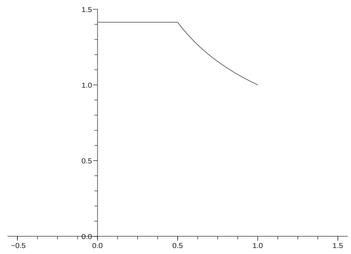


Fig. b: Grafico di f_n per $n = 2$.

Sia $x \in]0,1]$. Poichè $\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$, si ha che definitivamente $\frac{1}{n} \leq x$, cioè esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq N$ si ha $\frac{1}{n} \leq x$. Ne segue che per ogni $n \geq N$ si ha $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Quindi se $x \in]0,1]$ si ha che

$$\lim_n f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Quindi la successione (f_n) tende puntualmente su $]0,1]$ alla funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Poichè la funzione f non è limitata su $]0,1]$, si ha che la successione (f_n) non converge uniformemente a f su $]0,1]$.

e) Determiniamo inizialmente il limite puntuale della successione (f_n), dove

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < \dfrac{1}{n}, \\ 0 & \text{se } \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

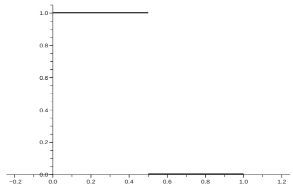


Fig. c: Grafico di f_n per $n = 2$.

Sia $x \in]0,1]$. Poichè $\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$, si ha che definitivamente $\frac{1}{n} \leq x$, cioè esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq N$ si ha $\frac{1}{n} \leq x$. Ne segue che per ogni $n \geq N$ si ha $f_n(x) = 0$. Quindi se $x \in]0,1]$ si ha che

$$\lim_n f_n(x) = 0.$$

Quindi la successione (f_n) tende puntualmente su $]0,1]$ alla funzione $f(x) = 0$.

Studiamo ora la convergenza uniforme della successione (f_n) a f su $]0,1]$. Calcoliamo il limite

$$\lim_n \|f_n - f\|_\infty = \lim_n \left(\sup_{x \in]0,1]} |f_n(x) - f(x)| \right) = \lim_n \left[\sup_{x \in]0,1]} f_n(x) \right].$$

Si ha che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in]0,1]} f_n(x) = 1.$$

Pertanto si ha che

$$\lim_n \|f_n - f\|_\infty = \lim_n \left[\sup_{x \in [0,1]} f_n(x) \right] = 1 \neq 0.$$

Ne segue che la successione (f_n) non converge uniformemente a f su $]0,1]$.

<u>Osservazione</u>

a) La funzione limite f è continua, mentre le funzioni f_n sono discontinue su $]0,1]$. Nonostante ciò non è possibile concludere che la convergenza non è uniforme. Infatti, si può concludere che la convergenza non è uniforme solo quando le funzioni f_n sono continue e la funzione limite f non lo è.

b) Se definiamo f_n anche in $x = 0$ con il valore $f_n(0) = 1$, allora la funzione limite f è definita in $x = 0$ con il valore $f(0) = 1$. In tal caso sia le f_n che f sono discontinue su $[0,1]$. Nonostante ciò non è possibile concludere che la convergenza non è uniforme. Infatti, si può concludere che la convergenza non è uniforme solo quando le funzioni f_n sono continue e la funzione limite f non lo è. Per studiare la convergenza uniforme bisogna procedere come nel caso precedente. Si ha che

$$\lim_n \|f_n - f\|_\infty = \lim_n \left(\sup_{x \in]0,1]} |f_n(x) - f(x)| \right) = 1 \neq 0.$$

Ne segue che anche in questo caso la successione (f_n) non converge uniformemente a f su $[0,1]$.

f) Determiniamo inizialmente il limite puntuale della successione (f_n), dove $f_n(x) = (1-x)x^n$ per ogni $x \in [0,1]$. Si ha che per ogni $x \in [0,1]$

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n (1-x)x^n = 0.$$

Quindi la successione (f_n) tende puntualmente su $[0,1]$ alla funzione $f(x) = 0$.

Studiamo ora la convergenza uniforme della successione (f_n) a f su $[0,1]$. Calcoliamo il limite

$$\lim_n \|f_n - f\|_\infty = \lim_n \left(\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \right) = \lim_n \left(\sup_{x\in[0,1]} \Big[(1-x)x^n\Big] \right).$$

Calcoliamo il $\sup_{x\in[0,1]} \Big[(1-x)x^n\Big]$. Poichè per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione $f_n(x) = (1-x)x^n$ è continua su $[0,1]$, per il Teorema di Weierstrass ammette massimo. Ne segue che

$$\sup_{x\in[0,1]} \Big[(1-x)x^n\Big] = \max_{x\in[0,1]} \Big[(1-x)x^n\Big].$$

Osserviamo che f_n è anche derivabile su $[0,1]$ con

$$f_n'(x) = [n - (n+1)x]x^{n-1}.$$

Quindi per ogni $n \geq 1$ si ha che $f_n'(x) = 0$ per $x = 0, \frac{n}{n+1} \in [0,1]$ e $f_n'(x) > 0$ per $0 < x < \frac{n}{n+1}$. Ne segue che $x = \frac{n}{n+1}$ è il punto di massimo di f_n su $[0,1]$ e

$$\max_{x\in[0,1]} \Big[(1-x)x^n\Big] = f\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Pertanto si ha che

$$\lim_n \|f_n - f\|_\infty = \lim_n \left(\sup_{x\in[0,1]} \Big[(1-x)x^n\Big] \right) = \lim_n \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 0.$$

Ne segue che la successione (f_n) converge uniformemente a f su $[0,1]$.

g) Determiniamo inizialmente il limite puntuale della successione (f_n), dove $f_n(x) = x^n$ per ogni $x \in [0,1]$. Si ha che per ogni $x \in [0,1]$

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Quindi la successione (f_n) tende puntualmente su $[0,1]$ alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Poichè le funzioni f_n sono continue mentre f non è continua su $[0,1]$, si ha che la successione (f_n) non converge uniformemente a f su $[0,1]$.

h) Determiniamo inizialmente il limite puntuale della successione (f_n), dove $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ per ogni $x \in [-1,1]$. Si ha che per ogni $x \in [-1,1]$

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0.$$

Quindi la successione (f_n) tende puntualmente su $[-1,1]$ alla funzione $f(x) = 0$.

Studiamo ora la convergenza uniforme della successione (f_n) a f su $[-1,1]$. Calcoliamo il limite

$$\lim_n \|f_n - f\|_\infty = \lim_n \left(\sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| \right) = \lim_n \left[\sup_{x\in[-1,1]} \left| \frac{nx}{1+n^2x^2} \right| \right].$$

Calcoliamo il $\displaystyle\sup_{x\in[-1,1]} \left| \frac{nx}{1+n^2x^2} \right|$. Essendo f_n dispari, si ha che

$$\sup_{x\in[-1,1]} \left| \frac{nx}{1+n^2x^2} \right| = \sup_{x\in[0,1]} \left(\frac{nx}{1+n^2x^2} \right).$$

Poichè per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ è continua su $[0,1]$, per il Teorema di Weierstrass ammette massimo. Ne segue che

$$\sup_{x\in[0,1]} \left(\frac{nx}{1+n^2x^2} \right) = \max_{x\in[0,1]} \left(\frac{nx}{1+n^2x^2} \right).$$

Osserviamo che f_n è anche derivabile su $[0,1]$ con

$$f_n'(x) = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}.$$

Quindi per ogni $n \geq 1$ si ha che $f_n'(x) = 0$ per $x = \frac{1}{n} \in [0,1]$ e $f_n'(x) > 0$ per $0 \leq x < \frac{1}{n}$. Ne segue che $x = \frac{1}{n}$ è il punto di massimo di f_n su $[0,1]$ e

$$\max_{x\in[0,1]} \left(\frac{nx}{1+n^2x^2} \right) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Pertanto si ha che

$$\lim_n \|f_n - f\|_\infty = \lim_n \left[\sup_{x\in[-1,1]} \left| \frac{nx}{1+n^2x^2} \right| \right] = \frac{1}{2}.$$

Ne segue che la successione (f_n) non converge uniformemente a f su $[-1,1]$.

k) Determiniamo inizialmente il limite puntuale della successione (f_n), dove

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{se } 0 < x < \dfrac{1}{n}, \\ 0 & \text{se } \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

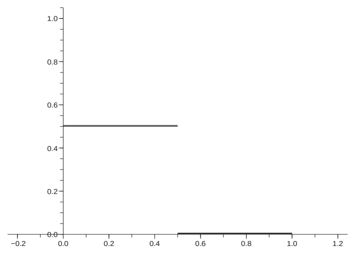


Fig. d: Grafico di f_n per $n = 2$.

Sia $x \in]0,1]$. Poichè $\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$, si ha che definitivamente $\frac{1}{n} \leq x$, cioè esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq N$ si ha $\frac{1}{n} \leq x$. Ne segue che per ogni $n \geq N$ si ha $f_n(x) = 0$. Quindi se $x \in]0,1]$ si ha che

$$\lim_n f_n(x) = 0.$$

Quindi la successione (f_n) tende puntualmente su $]0,1]$ alla funzione $f(x) = 0$.

Studiamo ora la convergenza uniforme della successione (f_n) a f su $]0,1]$. Calcoliamo il limite

$$\lim_n \|f_n - f\|_\infty = \lim_n \left(\sup_{x \in]0,1]} |f_n(x) - f(x)| \right) = \lim_n \left[\sup_{x \in]0,1]} f_n(x) \right].$$

Si ha che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in]0,1]} f_n(x) = \frac{1}{n}.$$

Pertanto si ha che

$$\lim_n \|f_n - f\|_\infty = \lim_n \left[\sup_{x \in [0,1]} f_n(x) \right] = \lim_n \frac{1}{n} = 0.$$

Ne segue che la successione (f_n) converge uniformemente a f su $]0,1]$.

<u>Osservazione</u>

La funzione limite f è continua, mentre le funzioni f_n sono discontinue su $]0,1]$. Nonostante ciò la convergenza è uniforme. Infatti, si può concludere che la convergenza non è uniforme solo quando le funzioni f_n sono continue e la funzione limite f non lo è.

* **Esercizio 2.** Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ siano $k_n = \max\{k \in \mathbb{N} : \; 2^k - 1 \leq n\}$,

$$I_n = \left[\frac{n+1-2^{k_n}}{2^{k_n}}, \frac{n+2-2^{k_n}}{2^{k_n}}\right]$$

e $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

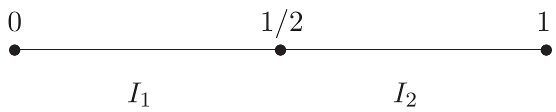
$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in I_n, \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus I_n. \end{cases}$$

Verificare che la successione (f_n) non converge puntualmente in alcun punto di $[0,1]$.

Svolgimento

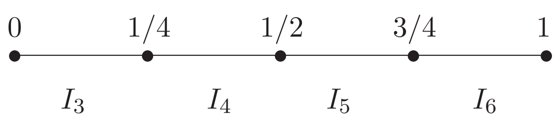
Per provare che la successione (f_n) non converge puntualmente in alcun punto di $[0,1]$ è necessario capire come sono fatti gli intervalli I_n, per ogni $n \geq 1$.

La successione di intervalli I_n è costruita nel seguente modo: si considera l'intervallo $[0,1]$ e al passo $h = 1$ lo si suddivide in due intervalli di eguale ampiezza $\frac{1}{2}$, I_1 e I_2.



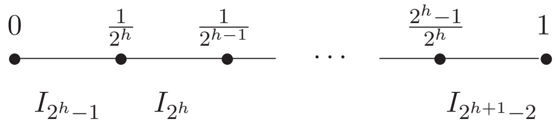
Infatti per $n = 1, 2$ si ha che $k_n = 1$ e quindi $I_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ e $I_2 = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Al passo $h = 2$ ciascuno degli intervalli individuati al passo precedente viene suddiviso in due intervalli di eguale ampiezza $\frac{1}{4}$ ottenendo così che l'intervallo $[0,1]$ è suddiviso in 4 intervalli, I_3, I_4, I_5, I_6.



Infatti per $n = 3, \dots, 6$ si ha che $k_n = 2$ e quindi $I_3 = \left[0, \frac{1}{4}\right]$, $I_4 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, $I_5 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$, $I_6 = \left[\frac{3}{4}, 1\right]$.

Iterando questo procedimento, al generico passo h ciascuno degli intervalli individuati al passo precedente viene suddiviso in due intervalli di eguale ampiezza $\frac{1}{2^h}$ ottenendo così che l'intervallo $[0,1]$ è suddiviso in 2^h intervalli, $I_{2^h-1}, \dots, I_{2^{h+1}-2}$.



Infatti per $n = 2^h - 1, \dots, 2^{h+1} - 2$ si ha che $k_n = h$ e quindi

$$I_{2^h-1} = \left[0, \frac{1}{2^h}\right], \dots, I_{2^{h+1}-2} = \left[\frac{2^h - 1}{2^h}, 1\right].$$

In termini più rigorosi possiamo dire che:

a) per ogni $n \geq 1$ si ha che $I_n \subseteq [0, 1]$;

b) per ogni $h \geq 1$ si ha che i 2^h intervalli $I_{2^h-1}, \dots, I_{2^{h+1}-2}$ costituiscono una suddivisione dell'intervallo $[0, 1]$, cioè $I_{2^h-1} \cup \dots \cup I_{2^{h+1}-2} = [0, 1]$ e se $2^h - 1 \leq i < j \leq 2^{h+1} - 2$, allora $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ se e solo se $j = i + 1$ e in tal caso $I_i \cap I_j$ è costituito da un unico punto.

Dimostrazione

a) Poichè $k_n = \max\{k \in \mathbb{N} : \ 2^k - 1 \leq n\}$, per ogni $n \geq 1$ si ha che

$$2^{k_n} - 1 \leq n \leq 2^{k_n+1} - 2.$$

Quindi

$$0 \leq \frac{n + 1 - 2^{k_n}}{2^{k_n}}, \qquad \frac{n + 2 - 2^{k_n}}{2^{k_n}} \leq \frac{2^{k_n+1} - 2^{k_n}}{2^{k_n}} = 1.$$

Ne segue che

$$I_n = \left[\frac{n + 1 - 2^{k_n}}{2^{k_n}}, \frac{n + 2 - 2^{k_n}}{2^{k_n}}\right] \subseteq [0, 1].$$

b) Sia $h \geq 1$. Consideriamo gli intervalli I_n con $2^h - 1 \leq n \leq 2^{h+1} - 2$. Ne segue che $k_n = h$. Posto $j = n - 2^h + 1$, si ha che $0 \leq j \leq 2^h - 1$ e quindi

$$I_{2^h-1+j} = I_n = \left[\frac{n + 1 - 2^{k_n}}{2^{k_n}}, \frac{n + 2 - 2^{k_n}}{2^{k_n}}\right] = \left[\frac{j}{2^h}, \frac{j + 1}{2^h}\right].$$

Si osserva che ciascun intervallo ha ampiezza $\frac{1}{2^h}$. Pertanto si ha che

$$I_{2^h-1} \cup \dots \cup I_{2^{h+1}-2} = \left[0, \frac{1}{2^h}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{j}{2^h}, \frac{j + 1}{2^h}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{2^h - 1}{2^h}, 1\right] = [0, 1].$$

In modo del tutto equivalente si può dimostrare che per ogni $x \in [0,1]$ esiste $0 \leq j \leq 2^h - 1$ tale che $x \in I_{2^h-1+j}$. Infatti, sia $x \in [0,1[$. Allora $0 \leq x\,2^h < 2^h$. Denotata con j_x la parte intera di $x\,2^h$, si ha che $0 \leq j_x \leq 2^h - 1$ e $j_x \leq x\,2^h < j_x + 1$. Di conseguenza si ha che

$$\frac{j_x}{2^h} \leq x < \frac{j_x + 1}{2^h}$$

e quindi $x \in I_{2^h-1+j_x}$. Se $x = 1$, allora è ovvio che $x \in I_{2^{h+1}-2}$. Ne segue che $[0,1] \subseteq I_{2^h-1} \cup \cdots \cup I_{2^{h+1}-2}$ e quindi $[0,1] = I_{2^h-1} \cup \cdots \cup I_{2^{h+1}-2}$.

Osserviamo infine che

$$I_n \cap I_{n+1} = I_{2^h-1+j} \cap I_{2^h+j} = \left[\frac{j}{2^h}, \frac{j+1}{2^h}\right] \cap \left[\frac{j+1}{2^h}, \frac{j+2}{2^h}\right] = \left\{\frac{j+1}{2^h}\right\},$$

mentre se $2^h - 1 \leq i < j \leq 2^{h+1} - 2$ con $j > i + 1$

$$I_i \cap I_j = I_{2^h-1+i} \cap I_{2^h-1+j} = \left[\frac{i}{2^h}, \frac{i+1}{2^h}\right] \cap \left[\frac{j}{2^h}, \frac{j+1}{2^h}\right] = \emptyset.$$

Studiamo ora la convergenza della successione (f_n). Sia $x \in [0,1]$. Per quanto appena osservato si ha che per ogni $h \geq 1$ esistono $2^h - 1 \leq i_h, j_h \leq 2^{h+1} - 2$ al più coincidenti, tali che $x \in I_{i_h} \cap I_{j_h}$ e $x \notin I_{m_h}$, per ogni $2^h - 1 \leq m_h \leq 2^{h+1} - 2$, $m_h \neq i_h, j_h$. Quindi se $2^h - 1 \leq n \leq 2^{h+1} - 2$, allora si ha che

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = i_h, j_h, \\ 0 & \text{se } n \neq i_h, j_h. \end{cases}$$

Pertanto, per ogni $h \geq 1$ si ha che esistono $n_h, m_h \geq 2^h - 1$ tali $f_{n_h}(x) = 1$ e $f_{m_h}(x) = 0$. Ne segue che non esiste $\lim_n f_n(x)$. Quindi la successione (f_n) non converge in alcun $x \in [0,1]$.